Государственное научное учреждение
«Институт математики
Национальной академии наук Беларуси»

УДК 517.926.4

ВОЙДЕЛЕВИЧ
Алексей Сергеевич

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕПРАВИЛЬНОСТИ, ВЕРХНИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И ВЕРХНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск 2017

Работа выполнена в Государственном научном учреждении
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

Научный руководитель:

БАРАБАНОВ Евгений Александрович,
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
отдела дифференциальных уравнений
Государственного научного учреждения
«Институт математики Национальной
академии наук Беларуси»;

Официальные оппоненты:

МАЗАНИК Сергей Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
Белорусского государственного университета;

КОНЮХ Александр Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики Учреждения
образования «Белорусский государственный
экономический университет»;

Оппонирующая организация:

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится 21 сентября 2017 г. в 13.30 на заседании Совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики НАН Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11. Телефон учёного секретаря Совета: (+375 17) 284 17 81, e-mail: svl@im.bas-net.by. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики НАН Беларуси».

Автореферат разослан 11 августа 2017 г.

Учёный секретарь Совета
по защите диссертаций Д 01.02.02
канд. физ.-мат. наук ____________ С. В. Лемешевский

ВВЕДЕНИЕ

В исследовании асимптотического поведения решений как линейных, так и нелинейных дифференциальных систем большую роль играет понятие характеристического показателя Ляпунова, которое используется в различных и зачастую достаточно далёких друг от друга областях математики и даёт асимптотически точную на бесконечности верхнюю границу изменения в логарифмической шкале нормы решений дифференциальной системы. Теория показателей Ляпунова в 60-х годах прошлого столетия оформилась в самостоятельную теорию, лежащую на стыке качественной и асимптотической теорий дифференциальных уравнений. Развитию теории показателей Ляпунова и её различным приложениям посвящены работы самого́ А. М. Ляпунова, а также работы П. Г. Боля, О. Перрона, К. П. Персидского, Н. П. Еругина, Ю. С. Богданова, Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана, В. М. Миллионщикова, Н. А. Изобова, М. И. Рахимбердиева, И. Н. Сергеева, С. А. Мазаника, Е. К. Макарова, А. Н. Ветохина, Л. Я. Адриановой, Е. А. Барабанова, В. В. Быкова, Р. А. Прохоровой, А. М. Нурматова, А. В. Липницкого, А. В. Конюха, Н. С. Нипарко, М. В. Смоленцева и многих других.

В современной теории показателей Ляпунова рассматривается большое количество числовых характеристик, описывающих различные свойства поведения решений дифференциальных систем на бесконечности (асимптотику свойств), а также реакцию системы на возмущения с точки зрения изменения этих свойств. Наряду с основными асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем — характеристическим показателем Ляпунова, нижним показателем Перрона, верхним и нижним показателями Боля, генеральными (особыми) и центральными показателями — важное место в теории показателей Ляпунова занимает и ряд других асимптотических характеристик, например, таких как коэффициенты неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, старший и младший экспоненциальные показатели, характеристические частоты нулей, знаков и корней и многие другие.

При изучении любой асимптотической характеристики естественно возникает задача, насколько полно и точно описывают эту характеристику найденные её свойства. В частности, содержательны следующие задачи, которые объединены в диссертации под общим названием «обратных задач»: полное описание взаимоотношений между однотипными асимптотическими характеристиками, вычисление точных границ изменения асимптотической характеристики на некотором множестве систем, описание её как функции начального вектора или функции на пространстве систем с той или иной топологией. Помимо установления (или выделения) нужных свойств изучаемой асимптотической характеристики, основным в решении сформулированных задач является построение (что и дало основание для указанного выше названия для класса таких задач) систем, которые реализуют те или иные свойства характеристики.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена полному описанию соотношений между коэффициентами неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, вычислению точных верхних границ изменения показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы при экспоненциально убывающих возмущениях её матрицы коэффициентов и описанию частот Сергеева нулей, знаков и корней линейных дифференциальных уравнений как функций начального вектора и функций на пространстве уравнений с компактно-открытой топологией.

Связь работы с крупными научными программами и темами

Диссертационная работа выполнена в Отделе дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси в соответствии с планом, являющимся составной частью госбюджетных НИР, предусмотренным Государственной программой фундаментальных исследований Республики Беларусь на 2011 – 2015 г.г. «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (Конвергенция), задание «Асимптотические спектры дифференциальных систем», шифр задания Конвергенция 1.2.01, № ГР 20112334, и Государственной программой научных исследований Республики Беларусь на 2016 – 2020 г.г. «Конвергенция – 2020».

Цель и задачи исследования

Цель диссертации — получить полные описания пар, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых линейных дифференциальных систем, и троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем; построить по матрице Коши линейной дифференциальной системы формулы вычисления точных верхних границ подвижности её показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов; вычислить номера бэровских классов характеристических частот знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений и точных борелевских классов множеств Лебега этих частот; описать спектры верхних характеристических частот знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений порядка выше двух.

Для этого в работе были поставлены и решены следующие задачи:

— получены полные описания пар, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых линейных дифференциальных систем, и троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем;

— построены формулы вычисления по матрице Коши линейной дифференциальной системы точных верхних границ подвижности её показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов;

— вычислены номера бэровских классов характеристических частот знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений и точных борелевских классов множеств Лебега этих частот;

— описаны спектры верхних характеристических частот знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений порядка выше двух в предположении принадлежности спектру нуля.

Объектом исследования являются линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-непрерывными и равномерно ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами, а также линейные однородные дифференциальные уравнения с непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами.

Предметом исследования являются соотношения между коэффициентами неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых систем и соотношения между коэффициентами неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем; верхние экспоненциальные показатели линейной дифференциальной системы; характеристические частоты знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений.

Научная новизна

Все полученные результаты являются существенно новыми. Они дают решения некоторых обратных задач для коэффициентов неправильности, верхних экспоненциальных показателей и верхних характеристических частот линейных дифференциальных систем. Основные полученные результаты:

1. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ неотрицательные числа σ_1 и σ_2 тогда и только тогда являются коэффициентами неправильности Ляпунова некоторой системы $A \in \mathcal{M}_n$ и ей сопряжённой $-A^{\mathsf{T}}$ соответственно, когда они удовлетворяют неравенствам $n^{-1}\sigma_2 \leqslant \sigma_1 \leqslant n\sigma_2$.

2. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ и упорядоченной тройки чисел (p, g, l) тогда и только тогда существует система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой справедливы равенства $\sigma_{\text{п}}(A) = p$, $\sigma_{\text{г}}(A) = g$ и $\sigma_{\text{л}}(A) = l$, когда для элементов этой тройки выполнены неравенства $0 \leqslant p \leqslant g \leqslant l \leqslant np$.

3. Пусть k — наименьшее число, больше или равное i, для которого существует такое разбиение $\mathcal{X}_A = L \oplus N$ пространства решений системы A, что $N(\cdot) \succ_{\text{e}} L(\cdot)$ и $\dim L = k$, либо $k = n$, если такого разложения не существует. Тогда точная верхняя граница $\nabla_i(A)$ подвижности i-ого показателей Ляпунова системы A совпадает со старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$.

4. Для любого уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ его верхние частоты $\widehat{\nu}^0(\cdot)$ нулей и $\widehat{\nu}^+(\cdot)$ корней принадлежат классу $(^*, F_{\sigma\delta})$ и верхняя частота $\widehat{\nu}^-(\cdot)$ знаков — классу $(^*, G_\delta)$, а нижние частоты $\check{\nu}^0(\cdot)$ нулей и $\check{\nu}^-(\cdot)$ знаков — классу $(G_{\delta\sigma}, ^*)$ и нижняя частота $\check{\nu}^+(\cdot)$ корней — классу $(F_\sigma, ^*)$.

5. Для любого уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ спектры верхних и нижних характеристических частот нулей, знаков и корней являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, существует уравнение из $\widetilde{\mathcal{E}}^3$, спектры верхних характеристических частот нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством $\mathcal{A}$.

6. Существует такое уравнение из $\widetilde{\mathcal{E}}^3$, что множество Лебега $[\widehat{\nu}^- \geqslant 1]$ его верхней частоты знаков является множеством точного первого борелевского класса. Существует такое уравнение из $\widetilde{\mathcal{E}}^3$, что множество Лебега $[\widehat{\nu}^0 \geqslant 1]$ его верхней частоты нулей и множество Лебега $[\widehat{\nu}^+ \geqslant 1]$ его верхней частоты корней являются множествами точного второго борелевского класса.

Положения, выносимые на защиту

1. Полное описание множества пар, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых линейных дифференциальных систем, и полное описание множества троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем.

2. Построение формулы вычисления по матрице Коши линейной дифференциальной системы точных верхних границ подвижности её показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов.

3. Вычисление номеров бэровских классов характеристических частот знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений и точных борелевских классов множеств Лебега этих частот.

4. Доказательство принадлежности спектров верхних характеристических частот знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений порядка выше двух классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой и обращение этого утверждения в предположении принадлежности спектрам нуля.

Личный вклад соискателя учёной степени

Все результаты диссертации получены соискателем лично. В совместных работах [6] – [8] научному руководителю принадлежат только постановка задач и общие идеи доказательства.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации были представлены и апробированы на следующих международных конференциях:

— на Международных математических конференциях «Еругинские чтения – 2011» (Беларусь, Новополоцк; май 2011) и «Еругинские чтения – 2014» (Беларусь, Новополоцк; май 2014);

— на Международной математической конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Беларусь, Минск; ноябрь 2012);

— на Международных математических конференциях по качественной теории дифференциальных уравнений (Грузия, Тбилиси; декабрь 2013, декабрь 2015, декабрь 2016);

— на Всероссийской математической конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» (Россия, Ижевск; июнь 2015);

— на Международной математической конференции «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Беларусь, Минск; декабрь 2015);

и докладывались на научных семинарах:

— на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете (Россия, Москва; ноябрь 2013, апрель 2016);

— на семинаре Отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси (Беларусь, Минск; в течение 2014 – 2017 г.г.).

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 печатных работах, среди которых 8 статей в рецензируемых научных журналах (из них 5 без соавторов), 4 статьи в сборниках трудов научных конференций, 7 тезисов выступлений на математических конференциях и семинарах. Общее количество опубликованных материалов — 104 стр., составляющие 7,29 авт. л.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырёх глав, содержащих 28 разделов, заключения и списка использованных источников. Полный объём диссертации составляет 156 страниц текста, из которых 11 страниц занимает библиографический список, содержащий 144 наименований (с учётом 19 публикаций соискателя).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации приводятся для замкнутости изложения необходимые сведения из линейной алгебры, общей теории линейных дифференциальных систем, теории показателей Ляпунова и дескриптивных теории множеств и теории функций.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси $n \times n$-матрицей коэффициентов, где $n \geqslant 2$. Класс всех таких систем обозначим через $\mathcal{M}_n$. В дальнейшем мы отождествляем систему (1) и её матрицу коэффициентов, а совокупность систем (1) — с линейным пространством их матриц коэффициентов, и поэтому будем писать $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$ или, несколько короче, $A \in \mathcal{M}_n$. В соответствии с этим в дальнейшем будем рассматривать сумму систем (1) и умножение их на скаляр. В первом случае результатом сложения систем является система с матрицей коэффициентов, равной сумме матриц коэффициентов слагаемых. Во втором случае результатом операции умножения является система с матрицей коэффициентов, равной матрице коэффициентов исходной системы, умноженной на скаляр.

Вместе с системой (1) рассмотрим сопряжённую ей систему

$$\dot{y} = -A^{\mathsf{T}}(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Очевидно, что системой, сопряжённой системе (2), является система (1); поэтому системы (1) и (2) называются взаимно сопряжёнными.

Одним из важных классов линейных дифференциальных систем является класс правильных по Ляпунову систем. Значение этого класса систем, открытого и изученного А.М. Ляпуновым, определяется следующим фундаментальным фактом: для них задача об условной устойчивости по первому приближению имеет положительное решение. Другими словами, если у нелинейной системы (при обычных предположениях на правую часть) система её линейного приближения правильная и обладает свойством условной экспоненциальной устойчивости, то этим же свойством (с теми же размерностью устойчивого многообразия и показателями асимптотики его решений) обладает и нулевое решение нелинейной системы[1,2]. Если же система первого линейного приближения не является правильной, то учёт меры её «неправильности», даваемой так называемыми её коэффициентами неправильности (см. ниже), позволяет строить признаки условной устойчивости или неустойчивости нулевого решения нелинейной системы[1,2].

---

[1]Ляпунов, А.М. Собр. сочинений. / А.М. Ляпунов. В 6-ти т. – Т. 2. М. – Л. : Изд -во АН СССР, 1956. – 473 с.

[2]Былов, Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. – М. : Наука, 1966. – 576 с.

Каждой системе $A \in \mathcal{M}_n$ ставятся в соответствие так называемые коэффициенты неправильности Ляпунова[1] $\sigma_{\text{л}}(A)$, Перрона[3] $\sigma_{\text{п}}(A)$ и Гробмана[4] $\sigma_{\text{г}}(A)$. Роль этих коэффициентов состоит в том, что они в существенном характеризуют реакцию системы (1) на линейные экспоненциально убывающие и нелинейные высшего порядка малости её возмущения; в частности, обращение хотя бы одного из них (а тогда и любого) в нуль равносильно правильности по Ляпунову системы (1).

Для формулировки результатов второй главы диссертации приведём определения коэффициентов неправильности системы $A \in \mathcal{M}_n$. Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1), а $\mu_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \mu_n(A)$ — показатели Ляпунова сопряжённой ей системы (2) (первые упорядочены по неубыванию, а вторые — по невозрастанию). Через $\Phi(A)$ обозначим совокупность фундаментальных матриц системы (1), через $X_A(\cdot,\cdot)$ — её оператор Коши, а через $\mathcal{X}_A$ — линейное пространство её решений. Для произвольной невырожденной $n \times n$-матрицы $X(t)$, $t \geqslant 0$, через $\lambda_i[X]$ обозначим показатель Ляпунова её i-ого столбца, $i = 1,\ldots,n$. След квадратной матрицы A обозначим через $\operatorname{Sp} A$. Тогда, по определению, коэффициенты неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана задаются соответственно равенствами:

$$\sigma_{\text{л}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) - \varliminf_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t \operatorname{Sp} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3}$$

$$\sigma_{\text{п}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \bigl\{\lambda_i(A) + \mu_i(A)\bigr\}, \tag{4}$$

$$\sigma_{\text{г}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{X\in\Phi(A)} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \bigl\{\lambda_i[X] + \lambda_i[(X^{-1})^{\mathsf{T}}]\bigr\}. \tag{5}$$

Во второй главе диссертации исследуется вопрос о том, что́ представляет собой множество пар, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова систем (1) и ей сопряжённой (2), а также множество троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана систем (1). Перейдём к более подробному описанию результатов второй главы диссертации.

Если коэффициенты $\sigma_{\text{п}}(A)$ Перрона и $\sigma_{\text{г}}(A)$ Гробмана, как следует из их определения (4) и (5), на взаимно сопряжённых системах (1) и (2) принимают равные значения, т. е. $\sigma_{\text{п}}(A) = \sigma_{\text{п}}(-A^{\mathsf{T}})$ и $\sigma_{\text{г}}(A) = \sigma_{\text{г}}(-A^{\mathsf{T}})$, то для коэффициента неправильности $\sigma_{\text{л}}(A)$ Ляпунова (3) это не так. Пример системы (1), для которой $\sigma_{\text{л}}(A) \neq \sigma_{\text{л}}(-A^{\mathsf{T}})$, приведён в монографии[2]. Вследствие этого возникает естественный вопрос: как связаны коэффициенты неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых систем, т.е., другими словами, что представляет собой множество пар $\bigl(\sigma_{\text{л}}(A), \sigma_{\text{л}}(-A^{\mathsf{T}})\bigr)$, составленных из коэффициентов непра-

[3]Perron, O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme / O. Perron // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd 31, Hf 4. – S. 748–766.

[4]Гробман, Д.М. Характеристические показатели систем, близких к линейным / Д.М. Гробман // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 1. – С. 121–166.

вильности Ляпунова таких систем. Полный ответ на поставленный вопрос даёт доказанная в диссертации

Теорема 1. *Для каждого натурального $n \geqslant 2$ неотрицательные числа σ_1 и σ_2 тогда и только тогда являются коэффициентами неправильности Ляпунова некоторой системы $A \in \mathcal{M}_n$ и ей сопряжённой $-A^{\mathsf{T}}$ соответственно, когда они удовлетворяют неравенствам*

$$n^{-1}\sigma_2 \leqslant \sigma_1 \leqslant n\sigma_2.$$

В монографии[2] доказано, что коэффициенты неправильности любой системы $A \in \mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leqslant \sigma_{\text{п}}(A) \leqslant \sigma_{\text{г}}(A) \leqslant n\sigma_{\text{п}}(A) \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{г}}(A) \leqslant \sigma_{\text{л}}(A) \leqslant n\sigma_{\text{г}}(A).$$

Кроме того, в монографии[2] установлено, что все эти неравенства достижимы и что существуют системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых коэффициенты неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана попарно различны. В монографии[5] получено следующее усиление приведённых неравенств:

$$0 \leqslant \sigma_{\text{п}}(A) \leqslant \sigma_{\text{г}}(A) \leqslant \sigma_{\text{л}}(A) \leqslant n\sigma_{\text{п}}(A) \tag{6}$$

для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$. Естественно возникает вопрос, окончательна ли цепочка неравенств (6) и не допускает ли и она, в свою очередь, усиления? Другими словами этот вопрос может быть переформулирован так: задают ли неравенства (6) все возможные соотношения между коэффициентами неправильности на классе $\mathcal{M}_n$ систем. Утвердительный ответ на него даёт доказанная в диссертации

Теорема 2. *Для каждого натурального $n \geqslant 2$ и упорядоченной тройки (p, g, l) чисел тогда и только тогда существует система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой справедливы равенства $\sigma_{\text{п}}(A) = p$, $\sigma_{\text{г}}(A) = g$ и $\sigma_{\text{л}}(A) = l$, когда для элементов этой тройки выполнены неравенства*

$$0 \leqslant p \leqslant g \leqslant l \leqslant np.$$

Приведём краткое содержание третьей главы диссертации. В данной главе наряду с системой (1) из $\mathcal{M}_n$ рассматривается возмущённая система

$$\dot{y} = \big(A(t) + Q(t)\big)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит классу Exp_0^n экспоненциально убывающих возмущений (т.е. характеристический показатель её нормы $\|Q(\cdot)\|$ отрицателен: $\lambda[Q] < 0$). В соответствии с принятыми обозначениями $\lambda_1(A + Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + Q)$ — показатели Ляпунова

[5]Изобов, Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова / Н.А. Изобов. – Мн. : БГУ, 2006. – 320 с.

системы (7). О. Перроном в работе[3] впервые показано, что показатели Ляпунова могут быть неустойчивыми при возмущениях из класса Exp_0^n : существует система $A \in \mathcal{M}_2$ и такое её возмущение $Q \in \mathrm{Exp}_0^2$, что выполнено неравенство $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$. Вследствие этого естественно возникла задача о вычислении для системы $A \in \mathcal{M}_n$ точных нижней и верхней границ подвижности её k-го показателя Ляпунова при таких возмущениях:

$$\Delta_k(A) = \inf\{\lambda_k(A+Q) \colon Q \in \mathrm{Exp}_0^n\} \quad \text{и} \quad \nabla_k(A) = \sup\{\lambda_k(A+Q) \colon Q \in \mathrm{Exp}_0^n\},$$

$k = 1, \ldots, n$. Величины $\Delta_1(A)$ и $\nabla_n(A)$ — младший и старший экспоненциальные показатели[6], или, как их теперь называют, показатели Изобова, вычислены в работе[6]:

$$\begin{aligned} \Delta_1(A) &= \lim_{\theta \to 1+0} \varlimsup_{\mathbb{N} \ni m \to +\infty} \theta^{-m} \sum_{j=1}^{m} \ln \|X_A^{-1}(\theta^j, \theta^{j-1})\|^{-1}, \\ \nabla_n(A) &= \lim_{\theta \to 1+0} \varlimsup_{\mathbb{N} \ni m \to +\infty} \theta^{-m} \sum_{j=1}^{m} \ln \|X_A(\theta^j, \theta^{j-1})\|. \end{aligned} \tag{8}$$

В работе[7] получены необходимые, а в работе[8] — необходимые и достаточные условия устойчивости всех показателей Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}_n$ при экспоненциально убывающих возмущениях (т.е. условия, при выполнении которых справедливы равенства $\Delta_k(A) = \nabla_k(A)$ при всех $k = 1, \ldots, n$).

Сформулированные задачи об устойчивости и о вычислении точных границ подвижности можно ставить для любого другого класса возмущений. Исторически первым таким рассматривавшимся классом возмущений был класс равномерно малых возмущений[3,9] матрицы коэффициентов. Для этого класса возмущений необходимые и достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова даются фундаментальной теоремой Перрона — Былова — Винограда — Миллионщикова — Изобова[3,9,10,11]. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова для класса равномерно малых возмущений найдены И. Н. Сер-

[6]Изобов, Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление / Н.А. Изобов // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 1. – С. 5–8.

[7]Нурматов, А.М. Необходимые условия устойчивости характеристических показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях / А.М. Нурматов; АН БССР, Ин-т математики. – Минск, 1987. – 30 с. – Деп. ВИНИТИ 12.03.1987, № 1811 – В87 // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 25, № 2. – С. 335–336.

[8]Барабанов, Е.А. Необходимое и достаточное условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях / Е.А. Барабанов, Н.С. Денисенко (Нипарко) // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 165–175

[9]Виноград, Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений / Р.Э. Виноград // Матем. сборник. – 1957. – Т. 42, № 2. – С. 207–222.

[10]Миллионщиков, В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1775–1784.

[11]Былов, Б.Ф. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы / Б.Ф. Былов, Н.А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1785–1793.

геевым в работах[12,13], там же доказано их равенство точным верхним границам подвижности показателей Ляпунова для класса бесконечно малых возмущений, соответственно. Хотя приводимая ниже теорема 4. о вычислении точных верхних границ подвижности показателей Ляпунова для класса экспоненциально убывающих возмущений по форме совпадает с теоремой И. Н. Сергеева и в идейном плане следует в основном её доказательству, тем не менее, в техническом отношении доказательства существенно различны. Принципиальные отличия содержатся в следующих понятиях.

Скажем, что линеал $N(\cdot)$ решений системы $A \in \mathcal{M}_n$ *экспоненциально больше* её линеала решений $L(\cdot)$ (далее это отношение будем обозначать как $N(\cdot) \succeq_{\mathrm{e}} L(\cdot)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $T_\varepsilon \geqslant 0$, что для любых ненулевых решений $x_1(\cdot) \in N(\cdot)$ и $x_2(\cdot) \in L(\cdot)$ выполнено неравенство

$$\big(\|x_1(t)\|/\|x_1(\tau)\|\big) : \big(\|x_2(t)\|/\|x_2(\tau)\|\big) \geqslant \exp(-\varepsilon\, t) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant \tau \geqslant T_\varepsilon.$$

Введённое отношение между линеалами, выраженное в других терминах, приведено в работе[8].

Будем говорить, что пара линеалов $\big(L(\cdot), N(\cdot)\big)$ является *экспоненциально регулярной*, если угол $\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \angle\big(L(t), N(t)\big)$, $t \geqslant 0$, между этими линеалами имеет точный нулевой характеристический показатель, т.е. справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\gamma(t) = 0$.

Скажем, что линеал $N(\cdot)$ решений системы (1) *сильно экспоненциально больше* линеала решений $L(\cdot)$ (далее будем обозначать это отношение через $N(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L(\cdot)$), если $N(\cdot) \succeq_{\mathrm{e}} L(\cdot)$ и пара $\big(L(\cdot), N(\cdot)\big)$ является экспоненциально регулярной.

Следующая теорема, доказанная в диссертации, показывает, что свойство системы иметь сильно экспоненциально разделённые линеалы данной размерности инвариантно при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов системы.

Теорема 3. *Пусть для разложения $\mathcal{X}_A = L \oplus N$, пространства $\mathcal{X}_A$ решений системы A выполнены условия*

$$N(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L(\cdot) \quad \text{и} \quad \dim L = n_1, \quad \dim N = n_2.$$

Тогда у всякой возмущённой системы $A + Q$ с $\lambda[Q] < 0$ найдётся такое разложение её пространства решений $\mathcal{X}_{A+Q} = L_Q \oplus N_Q$, для которого

$$N_Q(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L_Q(\cdot) \quad \text{и} \quad \dim L_Q = n_1, \quad \dim N_Q = n_2.$$

[12]Сергеев, И.Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 438–448.

[13]Сергеев, И.Н. К теории показателей Ляпунова / И.Н. Сергеев // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1983. Вып. 9. – С. 111–166.

По аналогии с формулами (8) старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ и младшим экспоненциальным показателем $\Delta\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$ решений системы (1) будем называть, соответственно, величины

$$\nabla\big|_L(A) \equiv \lim_{\theta\to 1+0}\ \varlimsup_{\mathbb{N}\ni m\to+\infty} \theta^{-m}\sum_{j=1}^{m}\ln\|X_A\big|_L(\theta^j,\theta^{j-1})\|, \tag{9}$$

$$\Delta\big|_L(A) \equiv \lim_{\theta\to 1+0}\ \varlimsup_{\mathbb{N}\ni m\to+\infty} \theta^{-m}\sum_{j=1}^{m}\ln\|X_A^{-1}\big|_L(\theta^j,\theta^{j-1})\|^{-1}, \tag{10}$$

где $X_A\big|_L(\cdot,\cdot)$ — сужение оператора Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ системы (1) на линеал решений $L(\cdot)$, т. е. $X_A\big|_L(t,\tau)\colon L(\tau)\to L(t)$ действует по правилу $\xi\mapsto x(t;\tau,\xi)$, где $x(\cdot;\tau,\xi)$ — решение системы (1) с начальным условием $x(\tau;\tau,\xi)=\xi$. Очевидно, что $\big(X_A\big|_L(t,\tau)\big)^{-1} = X_A^{-1}\big|_L(t,\tau) = X_A\big|_L(\tau,t)$.

В диссертации для любой системы $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n$ и каждого $i=1,\ldots,n$ вычислена по её матрице Коши верхняя граница $\nabla_i(A)$ подвижности, а именно, доказана

Теорема 4. *Пусть k — наименьшее число, больше или равное i, для которого существует такое разложение $\mathcal{X}_A = L\oplus N$, что $N(\cdot)\succ_{\mathrm{e}} L(\cdot)$ и $\dim L = k$, либо $k=n$, если такого разложения не существует. Тогда показатель $\nabla_i(A)$ совпадает со старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$.*

Приведём краткое содержание четвёртой главы диссертации. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка n ($n\in\mathbb{N}$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot y + a_n(t)y = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} [0,+\infty), \tag{11}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Будем отождествлять уравнение (11) и строку $a=a(\cdot)=\big(a_1(\cdot),\ldots,a_n(\cdot)\big)$ его коэффициентов и поэтому обозначать уравнение (11) также через a. Пусть $S_*(a)$ — множество всех ненулевых решений уравнения a. Для заданного натурального n через $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим множество всех уравнений (11) n-ого порядка, а также $\widetilde{\mathcal{E}} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{\mathcal{E}}^n$.

Для решения $y(\cdot)$ уравнения (11) точка $t\in\mathbb{R}_+$ называется точкой смены знака, если в любой окрестности этой точки функция $y(\cdot)$ принимает значения разных знаков. Символом $\varkappa$ обозначим величину, принимающую значения в множестве из трёх элементов $\{0,-,+\}$. Для ненулевого решения $y(\cdot)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ уравнения (11) в зависимости от значения $\varkappa$ через $\nu^\varkappa(y(\cdot);t)$ обозначим: число нулей, если $\varkappa=0$; число смен знака, если $\varkappa=-$; сумму кратностей корней, если $\varkappa=+$, функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $[0,t)$. Очевидно, что для любого ненулевого $y(\cdot)\in S_*(a)$ величины $\nu^\varkappa(y(\cdot);t)$ при любом $t\geqslant 0$ конечны.

Верхней (нижней) характеристической частотой $\widehat\nu^{\,0}[y]$ нулей, частотой $\widehat\nu^{\,-}[y]$ знаков и частотой $\widehat\nu^{\,+}[y]$ корней решения $y(\cdot)\in S_*(a)$ уравнения (11) называется величина

$$\widehat\nu^{\,\varkappa}[y] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\,\nu^{\,\varkappa}(y(\cdot);t) \quad \Big(\check\nu^{\,\varkappa}[y] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\,\nu^{\,\varkappa}(y(\cdot);t)\Big), \tag{12}$$

где символ $\varkappa$ равен 0, $-$ и $+$ соответственно. Теория асимптотических характеристик (12) и других родственных им характеристик решений линейных дифференциальных уравнений и систем начата И.Н. Сергеевым работами[14,15] и развита в его работе[16]. *Спектрами* $\widehat{\nu}^0\big(S_*(a)\big)$, $\widehat{\nu}^-\big(S_*(a)\big)$ и $\widehat{\nu}^+\big(S_*(a)\big)$ *верхних характеристических частоты нулей, частоты знаков и частоты корней* уравнения (11) называются множества, состоящие из верхних характеристических частот нулей, знаков и корней всех решений из $S_*(a)$ соответственно. *Спектры* $\check{\nu}^0\big(S_*(a)\big)$, $\check{\nu}^-\big(S_*(a)\big)$ и $\check{\nu}^+\big(S_*(a)\big)$ *нижних характеристических частот нулей, знаков и корней* уравнения (11) определяются аналогично. В дальнейшем для частот решений уравнений мы используем, следуя работе[17], название *«частоты Сергеева»*.

Для уравнения (11) с ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами частоты (12) также ограничены[15] (одной и той же постоянной для всех ненулевых решений). Если же коэффициенты уравнения (11) неограничены, то величины (12), вообще говоря, на некоторых или всех ненулевых решениях уравнения могут принимать значение $+\infty$.

Пусть $\widehat{\nu}^\varkappa(\cdot)$ и $\check{\nu}^\varkappa(\cdot)$ — функции $\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, действующие соответственно по правилу $\alpha\mapsto\widehat{\nu}^\varkappa[y_\alpha]$ и $\alpha\mapsto\check{\nu}^\varkappa[y_\alpha]$, где $y_\alpha(\cdot)$ — решение уравнения (11), для которого

$$\big(y_\alpha(0),\dot{y}_\alpha(0),\ldots,y_\alpha^{(n-1)}(0)\big)^{\mathsf{T}}=\alpha.$$

Функцию $\widehat{\nu}^\varkappa(\cdot)$ $\big(\check{\nu}^\varkappa(\cdot)\big)$ при $\varkappa=0,-,+$ назовём соответственно верхней (нижней) частатой нулей, знаков и корней уравнения (12).

Как следует из теоремы Штурма и отмечено в работах[14,15], спектры верхних характеристических частот нулей, знаков и корней уравнения первого порядка содержат только нуль, а уравнения второго порядка совпадают между собой и состоят из одного неотрицательного числа. Для уравнений высших порядков о строении спектров верхних частот Сергеева известно следующее. Для произвольных положительных несоизмеримых чисел $\omega_2>\omega_1$ существует[18] автономное уравнение (11) четвёртого порядка, спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней которого совпадают с отрезком $[\omega_1,\omega_2]$. В работе[19] при-

[14] Сергеев, И.Н. Определение характеристических частот линейных уравнений / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1573.

[15] Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 2006. Вып. 25. – С. 249–294.

[16] Сергеев, И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка / И.Н. Сергеев // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 2013. Вып. 29. – С. 414–442.

[17] Быков, В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений / В.В. Быков // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 419 – 425.

[18] Горицкий, А.Ю. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний / А.Ю. Горицкий, Т.Н. Фисенко // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 479–485.

[19] Смоленцев, М.В. Существование линейного уравнения третьего порядка со счётным спектром частот / М.В. Смоленцев // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 2014. Вып. 30. –

ведён пример неавтономного дифференциального уравнения третьего порядка, спектр верхней частоты Сергеева нулей которого содержит счётное множество значений, любое из которых существенно (т.е. принимается на решениях, множество начальных при $t = 0$ векторов которых имеет положительную меру), а в работе[20] — периодического дифференциального уравнения третьего порядка, все частоты которого точны, а их спектры содержат невырожденный отрезок.

В связи с приведёнными результатами естественно возникают вопросы, чтó представляют собой спектры $\widehat{\nu}^{\varkappa}\big(S_*(a)\big)$, $\check{\nu}^{\varkappa}\big(S_*(a)\big)$ частот и функции $\widehat{\nu}^{\varkappa}(\cdot)$, $\check{\nu}^{\varkappa}(\cdot)$, $\varkappa \in \{0, -, +\}$, уравнений (11). В диссертации в предположении принадлежности нуля спектрам получено их полное описание, а для функций нулей, знаков и корней уравнений (11) дана неулучшаемая характеризация их множеств Лебега $[\widehat{\nu}^{\varkappa} \geqslant r]$, $r \in \overline{\mathbb{R}}$, на языке борелевских классов.

Приведём необходимые для формулировки теорем определения. Пусть $\mathcal{M}$ — множество, а M и N — какие-либо системы подмножеств в $\mathcal{M}$. Скажем[21], что функция $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит *классу* $(M,^*)$, или что f есть *функция класса* $(M,^*)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ её множество Лебега $[f > r]$ принадлежит системе M. Если же для любого $r \in \mathbb{R}$ её множество Лебега $[f \geqslant r]$ принадлежит системе N, то скажем, что функция f принадлежит *классу* $(^*, N)$, или что f есть функция *класса* $(^*, N)$. Если функция f принадлежит обоим классам $(M,^*)$ и $(^*, N)$, то скажем, что функция f принадлежит *классу* (M, N), или что она является *функцией класса* (M, N). Основные интересующие нас классы множеств в $\mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ — первые три борелевские класса. Нулевой класс состоит из открытых и замкнутых множеств. Первый класс — из G_δ-множеств и F_σ-множеств, т.е. множеств, представимых соответственно в виде счётных пересечений открытых и счётных объединений замкнутых множеств. Второй класс — из $F_{\sigma\delta}$-множеств и $G_{\delta\sigma}$-множеств, т.е. множеств, представимых соответственно в виде счётных пересечений F_σ-множеств и счётных объединений G_δ-множеств. Множество, принадлежащее некоторому k-ому борелевскому классу, называется множеством точного борелевского класса k, если оно не принадлежит $(k-1)$-ому борелевскому классу.

Множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ называется[21,22] *суслинским множеством* прямой $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Класс суслинских множеств содержит в качестве собственного подкласса класс борелевских множеств и является собственным подклассом класса измеримых по Лебегу множеств. Множество $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ — *суслинское множество* расширенной числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

С. 242–251.

[20]Смоленцев, М.В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок / М.В. Смоленцев // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1413–1417.

[21]Хаусдорф Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф – М. – Л. : ОНТИ, 1937. – 304 с.

[22]Куратовский, К. Топология. В 2-х т. Т. 1. / К. Куратовский – М. : Мир, 1966. – 596 с.

Теорема 5. *Для любого уравнения* $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ *его верхние частоты* $\widehat{\nu}^0(\cdot)$ *нулей и* $\widehat{\nu}^+(\cdot)$ *корней принадлежат классу* $(^*, F_{\sigma\delta})$ *и верхняя частота* $\widehat{\nu}^-(\cdot)$ *знаков — классу* $(^*, G_\delta)$, *а нижние частоты* $\check{\nu}^0(\cdot)$ *нулей и* $\check{\nu}^-(\cdot)$ *знаков — классу* $(G_{\delta\sigma}, ^*)$ *и нижняя частота* $\check{\nu}^+(\cdot)$ *корней — классу* $(F_\sigma, ^*)$.

Теорема 5., в частности, означает, что функция $\widehat{\nu}^-(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра, а функции $\widehat{\nu}^0(\cdot)$ и $\widehat{\nu}^+(\cdot)$ — третьему классу Бэра. Простым следствием теоремы 5., определения суслинских множеств и свойств бэровских функций является

Теорема 6. *Для любого уравнения* $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ *спектры верхних и нижних частот Сергеева нулей, знаков и корней являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой.*

В предположении, что спектры содержат точку нуль, получено обращение теоремы 6. для верхних частот: справедлива

Теорема 7. *Для произвольного суслинского множества* $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, *содержащего нуль, существует уравнение из* $\widetilde{\mathcal{E}}^3$, *спектры верхних характеристических частот нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством* $\mathcal{A}$.

Из теоремы 5. следует, что указанные в ней множества Лебега верхней частоты знаков являются множествами первого борелевского класса, а множества Лебега верхних частот нулей и корней — множествами второго борелевского класса. Следующие теоремы показывает, что эти утверждения неулучшаемы.

Теорема 8. *Существует такое уравнение из* $\widetilde{\mathcal{E}}^3$, *что множество Лебега* $[\widehat{\nu}^- \geqslant 1]$ *его верхней частоты знаков является множеством точного первого борелевского класса.*

Теорема 9. *Существует такое уравнение из* $\widetilde{\mathcal{E}}^3$, *что множество Лебега* $[\widehat{\nu}^0 \geqslant 1]$ *его верхней частоты нулей и множество Лебега* $[\widehat{\nu}^+ \geqslant 1]$ *его верхней частоты корней являются множествами точного второго борелевского класса.*

Теоремы 1. — 9. составляют основное содержание диссертации и опубликованы в журнальных статьях [1-А] – [8-А], в статьях в сборниках трудов научных конференций [9-А] – [12-А], а также в тезисах докладов и выступлений на конференциях и семинарах [13-А] – [19-А].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. А. Барабанову за постановку задач, решаемых в диссертации, и внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

К основным результатам диссертации относятся следующие:

1. полностью описано множество пар, состоящих из коэффициентов неправильности Ляпунова взаимно сопряженных линейных дифференциальных систем, и дано полное описание множества троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем [1] – [3], [9], [10];

2. вычислены точные границы подвижности вверх показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях их матриц коэффициентов [4], [11] – [13];

3. вычислены точные борелевские классы лебеговых множеств частот Сергеева знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений [7], [8], [15] – [19];

4. установлено, что спектры верхних характеристических частот знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, получено обращение этого утверждения в предположении принадлежности нуля спектрам [5] – [8], [14] – [18].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретических исследованиях по асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений и систем, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям.

Список публикаций соискателя по теме диссертации

Статьи в научных рецензируемых журналах

1. Войделевич, А.С. Взаимное расположение коэффициентов неправильности Ляпунова исходной и сопряженной линейных дифференциальных систем / А.С. Войделевич // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 2. – С. 10–14.
2. Войделевич, А.С. Соотношения между коэффициентами неправильности линейных дифференциальных систем / А.С. Войделевич // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 17 – 21.
3. Войделевич, А.С. Полное описание соотношений между коэффициентами неправильности линейных дифференциальных систем / А.С. Войделевич // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 283 – 289.
4. Войделевич, А.С. Точные границы подвижности вверх показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матриц коэффициентов / А.С. Войделевич // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1312 – 1324.
5. Войделевич, А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений / А.С. Войделевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фізмат навук. – 2015. – № 3. – С. 17 – 23.
6. Барабанов, Е.А. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений / Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 1. – С. 24 – 31.
7. Барабанов, Е.А. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I / Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 10. – С. 1302 – 1320.
8. Барабанов, Е.А. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II / Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1595 – 1609.

Статьи в сборниках трудов научных конференций

9. Vaidzelevich, A.S. Calculation of Exact Upper Bounds of Lyapunov Exponents of Linear Differential System with Exponentially Decreasing Perturbations of the Matrix Coefficients / A.S. Vaidzelevich // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2013. – P. 139 – 140.
10. Барабанов, Е.А. О бэровском классе и строении спектров верхних характеристических частот нулей, знаков и корней линейных дифференциальных уравнений / Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич // Материалы Междунар. матем. конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», Минск, 7 – 10 декабря 2015 г.: в 2 ч. / Мн.: Институт математики НАН Беларуси; ред.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2015. – Ч. 1. – С. 11 – 13.
11. Barabanov, E.A. About the Structure of Upper Frequency Spectra of Linear Differential Equations / E.A. Barabanov, A.S. Vaidzelevich // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2015. – P. 24 – 26.

12. Barabanov, E.A. On the Baire Classes of the Sergeev Lower Frequency of Zeros, Signs, and Roots of Linear Differential Equations / E.A. Barabanov, A.S. Vaidzelevich // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2016. – P. 34 – 36.

Тезисы докладов и выступлений на конференциях и семинарах

13. Войделевич, А.С. Полное описание взаимоотношений между коэффициентами неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем / А.С. Войделевич // Еругинские чтения – 2011: тез. докл. XIV Междунар. научн. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г. / Полоцкий гос. ун-т.; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. – Новополоцк, 2011. – С. 31.
14. Войделевич, А.С. Соотношения между коэффициентами неправильности линейных дифференциальных систем / А.С. Войделевич // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. научн. конф. Минск, 5 – 9 ноября 2012 г.: в 5 ч. / Мн.: Институт математики НАН Беларуси; ред.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 2. – С. 16 – 17.
15. Войделевич, А.С. Вычисление точных верхних границ показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матриц коэффициентов / А.С. Войделевич / Хроника семинара по качеств. теории дифференц. уравнений в МГУ // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1511 – 1512.
16. Войделевич, А.С. О вычислении по матрице Коши точных верхних границ подвижности показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матриц коэффициентов / А.С. Войделевич // Еругинские чтения – 2014: тез. докл. XVI Междунар. научн. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 20 – 22 мая 2014 г.: в 2 ч. / Мн.: Институт математики НАН Беларуси; ред.: А.К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2014. – Ч. 1. – С. 30 – 31.
17. Войделевич, А.С. О спектрах верхних характеристических частот нулей решений линейных дифференциальных уравнений / А.С. Войделевич // Тез. докл. Всеросс. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9 – 11 июня 2015 г. / Ижевск: Изд-во «Удмурдтский университет»; редкол.: А.С. Банников [и др.]. – Ижевск, 2015. – С. 46 – 47.
18. Войделевич, А. С. Обратные задачи для коэффициентов неправильности, верхних экспоненциальных показателей и верхних характериситческих частот линейных дифференциальных систем / А.С. Войделевич / Хроника семинара по качеств. теории дифференц. уравнений в МГУ // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 6. — С. 855 – 856.
19. Барабанов, Е.А. О бэровском классе нижних частот Сергеева нулей, знаков и корней линейных дифференциальных уравнений / Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич // Еругинские чтения – 2017: тез. докл. XVII Междунар. научн. конф. по дифференц. уравнениям, Минск, 16 – 20 мая 2017 г.: в 2 ч. / Мн.: Институт математики НАН Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2017. – Ч. 1. – С. 18 – 19.

РЭЗЮМЕ

Вайдзелевіч Аляксей Сяргеевіч

Зваротныя задачы для каэфіцыентаў няправільнасці, верхніх экспоненциальных паказчыкаў і верхніх характарыстычных частот лінейных дыферэнцыяльных сістэм

Ключавыя словы: дыферэнцыяльная лінейная сістэма, паказчык Ляпунова, каэфіцыент няправільнасці Ляпунова, каэфіцыент няправільнасці Перрона, каэфіцыент няправільнасці Гробмана, экспанентныя паказчыкі, частоты Сяргеева, характарыстычныя частоты, спектры частот Сяргеева, класы Бэра функцый, суслінскае мноства.

Мэта даследавання: атрымаць поўныя апісання пар, складзеных з каэфіцыентаў няправільнасці Ляпунова ўзаемна спалучаных лінейных дыферэнцыяльных сістэм, і троек, складзеных з каэфіцыентаў няправільнасці Ляпунова, Перрона і Гробмана лінейных дыферэнцыяльных сістэм; пабудаваць па матрыцы Кашы лінейнай дыферэнцыяльнай сістэмы формулы вылічэння дакладных верхніх межаў рухомасці яе паказчыкаў Ляпунова пры экспанентна слабеючых абурэннях матрыцы каэфіцыентаў; вылічыць нумары бэраўскіх класаў характарыстычных частот знакаў, нулёў і каранёў дыферэнцыяльных раўнанняў і дакладных барэлеўскіх класаў мностваў Лебега гэтых частот; апісаць спектры верхніх характарыстычных частот знакаў, нулёў і каранёў дыферэнцыяльных раўнанняў парадку вышэй двух.

Метады даследавання: метады тэорыі паказчыкаў Ляпунова, агульнай і асімптатычнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў і некаторыя метады дэскрыптыўных тэорый мностваў і функцый.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Атрымана поўнае апісанне мноства пар, складзеных з каэфіцыентаў няправільнасці Ляпунова ўзаемна спалучаных лінейных дыферэнцыяльных сістэм, і поўнае апісанне мноства троек, складзеных з каэфіцыентаў няправільнасці Ляпунова, Перрона і Гробмана лінейных дыферэнцыяльных сістэм. Пабудаваны формулы вылічэння па матрыцы Кашы лінейнай дыферэнцыяльнай сістэмы дакладных верхніх межаў рухомасці яе паказчыкаў Ляпунова пры экспанентна слабеючых абурэннях матрыцы каэфіцыентаў. Вылічаны нумары бэраўскіх класаў характарыстычных частот знакаў, нулёў і каранёў лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў і дакладных барэлеўскіх класаў мностваў Лебега гэтых частот. Даказаны прыналежнасць спектраў верхніх характарыстычных частот знакаў, нулёў і каранёў лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў парадку вышэй двух класу суслінскіх мностваў неадмоўнай паўвосі пашыранай лікавай прамой і зварот гэтага сцвярджэння ў дапушчэнні прыналежнасці спектрам нуля.

Усе пералічаныя вынікі з'яўляюцца істотна новымі. Яны натуральна працягваюць і развіваюць вядомыя вынікі асімптатычнай тэорыі лінейных дыферэнцыяльных сістэм.

Рэкамендацыі па выкарыстанню і галіна выкарыстання. Вынікі дысертацыі носяць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў тэарэтычных даследаваннях па асімптатычнай тэорыі лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм, а таксама пры чытанні спецкурсаў.

РЕЗЮМЕ

Войделевич Алексей Сергеевич

Обратные задачи для коэффициентов неправильности, верхних экспоненциальных показателей и верхних характеристических частот линейных дифференциальных систем

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, показатель Ляпунова, коэффициент неправильности Ляпунова, коэффициент неправильности Перрона, коэффициент неправильности Гробмана, экспоненциальные показатели, частоты Сергеева, характеристические частоты, спектры частот Сергеева, классы Бэра функций, суслинское множество.

Цель исследования: получить полные описания пар, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых линейных дифференциальных систем, и троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем; построить по матрице Коши линейной дифференциальной системы формулы вычисления точных верхних границ подвижности её показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов; вычислить номера бэровских классов характеристических частот знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений и точных борелевских классов множеств Лебега этих частот; описать спектры верхних характеристических частот знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений порядка выше двух.

Методы исследования: методы теории показателей Ляпунова, общей и асимптотической теорий дифференциальных уравнений и некоторые методы дескриптивных теорий множеств и функций.

Полученные результаты и их новизна. Получено полное описание множества пар, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова взаимно сопряжённых линейных дифференциальных систем, и полное описание множества троек, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана линейных дифференциальных систем. Построены формулы вычисления по матрице Коши линейной дифференциальной системы точных верхних границ подвижности её показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов. Вычислены номера бэровских классов характеристических частот знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений и точных борелевских классов множеств Лебега этих частот. Доказана принадлежность спектров верхних характеристических частот знаков, нулей и корней линейных дифференциальных уравнений порядка выше двух классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой и обращение этого утверждения в предположении принадлежности спектрам нуля.

Все перечисленные результаты являются существенно новыми. Они естественно продолжают и развивают известные результаты асимптотической теории линейных дифференциальных систем.

Рекомендации по использованию и область применения. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретических исследованиях по асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений и систем, а также при чтении спецкурсов.

SUMMARY

Vaidzelevich Aliakseil Syargeevich

The inverse problems for the coefficients of the irregularity, the upper exponential exponents, and upper characteristic frequencies of linear differential systems

Keywords: linear differential system, Lyapunov exponent, Lyapunov irregularity coefficient, Perron irregularity coefficient, Grobman irregularity coefficient, exponential exponents, Sergeeva frequencies, the characteristic frequencies, spectra of Sergeeva frequencies, the classes of Baire functions, Souslin set.

The Goal of research: to obtain a complete description of pairs composed of Lyapunov irregularity coefficients of mutually conjugate linear differential systems, and triples composed of Lyapunov, Perron and Grobman irregularity coefficients of linear differential systems; to construct formulas for the computation of the exact boundaries of upper mobility for Lyapunov exponents under exponentially decaying perturbations of its coefficient matrix on the basis of the Cauchy matrix; to calculate numbers of Baire classes of characteristic frequencies of signs, zeros and roots of differential equations and the exact Borel classes of Lebesgue sets of these frequencies; to describe the upper spectra of characteristic frequencies of signs, zeros and roots of differential equations of order higher than two.

Methods of investigation: methods of Lyapunov exponents theory, general and asymptotic theories of differential equations, methods of descriptive set theory and function theory.

The received results and their novelty. A complete description of the set of pairs composed of Lyapunov irregularity coefficients of mutually conjugate linear differential systems, and a complete description of the set of triples composed of Lyapunov, Perron and Grobman irregularity coefficients of linear differential systems were obtained. Formulas for the computation of the exact boundaries of upper mobility for Lyapunov exponents under exponentially decaying perturbations of its coefficient matrix on the basis of the Cauchy matrix were constructed. Numbers of Baire classes of characteristic frequencies of sings, zeros and roots of linear differential equations and the exact Borel classes of Lebesgue sets of these frequencies were calculated. Proven that upper spectra of characteristic frequencies of sings, zeros and roots of linear differential equations of order higher than two belong to the class of Souslin sets of the nonnegative semi-axis of the extended number line. The inverse statement of this claim was proven on the assumption that zero belongs to the spectra.

All listed results are essentially new. They naturally continue and develop known results of the asymptotic theory of linear differential systems.

Recommendations on the use and the application area. The results of the thesis are of theoretical nature. They can be used in theoretical studies on the asymptotic theory of linear differential equations and systems, and reading of special courses on differential equations.

Подписано в печать 22 июня 2017 г.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 1,28. Уч.-изд. л. 1,16.
Тираж 60 экз. Заказ № 3.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11.